Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Pablo José Gerlach Mena
gerlach@us.es

Las mates de Gerlachito

https://www.youtube.com/channel/UClxtuOawscfjTAuKRIat6SA

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Normalmente vamos a trabajar con funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o en un cierto subconjunto de $\mathbb{R}$.

Algunas propiedades que solemos exigirle a las funciones son las siguientes:

- Inyectividad: Si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- Sobreyectividad: Si $f: X \to Y$, $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tal que $f(x) = y$.
- Biyectividad: Inyectiva + Sobreyectiva.
- Creciente: Si $x > \tilde{x} \Rightarrow f(x) > f(\tilde{x})$
- Decreciente: Si $x > \tilde{x} \Rightarrow f(x) < f(\tilde{x})$

$\Rightarrow$ Decimos que f es monótona si f es creciente o decreciente.

- Par: Si $f(-x) = f(x)$
- Impar: Si $f(-x) = -f(x)$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que:

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como parece que tenemos casi una identidad notable, vamos a considerar el siguiente polinomio:

$Q(x) := P(x) - x^2.$

¿Cómo quedaría la ecuación funcional anterior con el polinomio $Q(x)$ en lugar de $P(x)$? Tenemos:

$$Q(x+1) \overset{DEF}{=} P(x+1) - (x+1)^2 \overset{E.F.}{=} P(x) + \cancel{2x} + \cancel{1} - \underbrace{(x+1)^2}_{x^2+\cancel{2x}+\cancel{1}} = P(x) - x^2 \overset{DEF}{=} Q(x).$$

Es decir:

$$Q(x+1) = Q(x)$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que:

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tenemos entonces que:

$\underbrace{Q(x+1) = Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.}_{}$ $\Longleftrightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R}$ constante tal que $Q(x) \equiv C_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

si $gr(Q) = n$, entonces $Q(x+1)$ y $Q(x)$ coinciden en más de $n+1$ puntos

Por lo tanto:

$\underbrace{Q(x)}_{P(x)-x^2} = C_1 \Longrightarrow \boxed{P(x) = x^2 + C_1}$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que:

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1 \iff P(x+1) - P(x) = 2x+1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Otra opción sería hacerlo por "fuerza bruta", es decir, buscamos:

$P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Entonces:

$$P(x+1) - P(x) = \underbrace{a_n(x+1)^n}_{\boxed{\cancel{a_n x^n}} + a_n n x^{n-1} + \underbrace{\cdots}_{\text{Grado} \le n-2.}} + \underbrace{\overset{\cancel{a_{n-1}x^{n-1}} + \cdots}{\overset{\|}{a_{n-1}(x+1)^{n-1}}} + \cdots + a_1(x+1) + a_0}_{\text{Grado} \le n-1} - \boxed{\cancel{a_n x^n}} \underbrace{\overset{\cancel{-a_{n-1}x^{n-1}}}{-\cdots} - a_1 x - a_0}_{\text{Grado} \le n-1} =$$

$$= a_n n x^{n-1} + \underbrace{\cdots}_{\text{Grado} \le n-2}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que:

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Hemos obtenido que:

$$P(x+1) - P(x) = a_n\, n x^{n-1} + \underbrace{\cdots}_{\text{Grado} \leq n-2} = 2x^1 + 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} n-1 = 1;\ \boxed{n=2} \\ a_2 \cdot 2 = 2;\ \boxed{a_2 = 1} \end{cases}$$

Buscamos:

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = x^2 + a_1 x + a_0. \Rightarrow ¿a_1, a_0?$$

Estudiamos:

$$P(x+1) - P(x) = (x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0 - x^2 - a_1 x - a_0 = \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{a_1 x} + a_1 + \cancel{a_0} - \cancel{x^2} - \cancel{a_1 x} - \cancel{a_0} =$$

$$= 2x + 1 + a_1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Sabemos}}}{=} 2x + 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

Luego:

$$\boxed{P(x) = x^2 + a_0}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que:

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$\exists \lambda > 0 \quad f(\lambda) = 1$

$f(1) = 1$

Hallar todas las funciones $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que cumplen que existe $\lambda > 0$ con $\boxed{f(\lambda) = 1}$ tal que

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Veamos qué obtenemos cuando hacemos $x = y = 1$:

$$f(1) \cdot f(1) + \underbrace{f(\lambda) \cdot f(\lambda)}_{1} = 2f(1) \iff \underbrace{f(1)^2 - 2f(1) + 1}_{(f(1)-1)^2} = 0 \iff \boxed{f(1) = 1}$$

Si ahora hacemos $y = 1$ obtenemos que:

$$f(x) \cdot \underbrace{f(1)}_{1} + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) \underbrace{f(\lambda)}_{1} = 2f(x) \iff f(x) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = 2f(x) \iff \boxed{f(x) = f\left(\frac{\lambda}{x}\right)}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$\exists \lambda > 0 \quad f(\lambda) = 1$

$f(1) = 1$

$\boxed{f(x) = f\left(\frac{\lambda}{x}\right)}$

Hallar todas las funciones $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que cumplen que existe $\lambda > 0$ con $f(\lambda) = 1$ tal que

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Si hacemos $y = \frac{\lambda}{x}$:

$$f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) \cdot f\Bigg(\underbrace{\frac{\lambda}{\frac{\lambda}{x}}}\Bigg) = 2f\left(\cancel{x}\frac{\lambda}{\cancel{x}}\right) \iff \underbrace{f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f(x)}_{2f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right)} = 2\underbrace{f(\lambda)}_{1} = 2 \iff$$

$$\frac{\lambda}{1} : \frac{\lambda}{x} = \frac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{\lambda}} = x$$

$$\iff f(x)\boxed{f\left(\frac{\lambda}{x}\right)} = 1 \implies f(x)f(x) = 1 \iff f(x)^2 = 1 \implies \begin{cases} f(x) = 1 \\ \text{ó} \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que cumplen que existe $\lambda > 0$ con $f(\lambda) = 1$ tal que

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Para poder determinar si $f(x)=1$ ó $f(x)=-1$ vamos a realizar el siguiente cambio:

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt{t} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(\sqrt{t})f(\sqrt{t}) + f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right) f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right) = 2f(\underbrace{\sqrt{t}\sqrt{t}}_{t}) \Longleftrightarrow \boxed{2f(t) = f(\sqrt{t})^2 + f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right)^2 \geqslant 0 \quad \forall t>0}$$

Como $f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t>0$, deducimos que:

$$\boxed{f(x) \equiv 1 \quad \forall x>0}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que cumplen que existe $\lambda > 0$ con $f(\lambda) = 1$ tal que

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican que

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\big(f(x) + f(y)\big),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Si hacemos $x = y$ podemos determinar fácilmente el valor de $f(0)$:

$$\underbrace{f(x^2 - x^2)}_{f(0)} = \underbrace{(x - x)}_{0}\big(f(x) + f(x)\big) \Longrightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

Ahora podemos hacer $y = 0$, lo cual nos proporciona:

$$f(x^2) = x \cdot \big(f(x) + \underbrace{f(0)}_{0}\big) \Longleftrightarrow \boxed{f(x^2) = x\,f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$f(0)=0$

$f(x^2)=xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que verifican que

$$f(x^2-y^2)=(x-y)\big(f(x)+f(y)\big),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Si hacemos $-x$ en la última ecuación obtenida:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{f((-x)^2)}=(-x)f(-x) \\ f(x^2)=x\cdot f(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow -x f(-x) = x f(x) \xrightarrow[\text{si } x\neq 0]{} \boxed{f(-x)=-f(x)} \Longrightarrow f \text{ es una función impar.}$$

Hacemos a continuación $-y$ en la ecuación funcional original:

$$\underbrace{f(x^2-(-y)^2)}=(x-(-y))\big(f(x)+f(-y)\big)=(x+y)\big(f(x)-f(y)\big)$$

$$f(x^2-y^2)=(x-y)\big(f(x)+f(y)\big)$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$f(0)=0$
$f(x^2)=xf(x)$
$f(-x)=-f(x)$

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que verifican que

$$f(x^2-y^2)=(x-y)\big(f(x)+f(y)\big),$$

para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$.

Luego:

$$\underbrace{(x+y)(f(x)-f(y))}_{\cancel{xf(x)}-xf(y)+yf(x)-\cancel{yf(y)}}=\underbrace{(x-y)(f(x)+f(y))}_{\cancel{xf(x)}+xf(y)-yf(x)-\cancel{yf(y)}}\iff 2xf(y)=2yf(x)\iff\boxed{xf(y)=yf(x)}$$

Finalmente, si hacemos $y=1$ obtenemos que:

$$x\underbrace{\boxed{f(1)}}_{= m}=1\cdot f(x)\implies\boxed{f(x)=mx\quad\text{con } m\in\mathbb{R}}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican que

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\big(f(x) + f(y)\big),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

A cada entero positivo n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$\{0,1,2,\dots\}$

1. $f(r \cdot s) = f(r) + f(s)$,
2. $f(n) = 0$ siempre que la cifra de las unidades de n sea 3,
3. $f(10) = 0$.

Sabemos que:

$$1985 = 5 \cdot \underbrace{397}_{\text{Primo}}$$

Hallar $f(1985)$. Justificar la respuesta.

De momento sabemos que:

$$f(1985) = f(5 \cdot 397) = f(5) + f(397) = 0 + f(397) = f(397)$$

Además:

$$0 = f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5) \Longleftrightarrow f(2) = 0, \ \boxed{f(5) = 0}$$

$f(2) \geq 0$
$f(5) \geq 0$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

A cada entero positivo n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. $f(r \cdot s) = f(r) + f(s)$,
2. $f(n) = 0$ siempre que la cifra de las unidades de n sea 3,
3. $f(10) = 0$.

Hallar $f(1985)$. Justificar la respuesta.

$$f(3 \cdot s) = \underbrace{f(3)}_{0} + f(s) = f(s)$$

$$397 \cdot 3 = 900 + 270 + 21 = 1191$$

$$397 \cdot 3 \cdot 3 = 3573$$

Para ver cuánto vale $f(397)$ vamos a usar también la 2ª propiedad:

$$0 = f(357\underline{\underline{3}}) = f(397 \cdot 3 \cdot 3) = f(397) + \underbrace{f(3)}_{0} + \underbrace{f(3)}_{0} \Longrightarrow f(397) = 0$$

Por lo tanto:

$$f(1985) = f(5) + f(397) = 0 + 0 = 0.$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

A cada entero positivo n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. $f(r \cdot s) = f(r) + f(s)$,
2. $f(n) = 0$ siempre que la cifra de las unidades de n sea 3,
3. $f(10) = 0$.

¿Cuánto vale $f(2021)$?

Hallar $f(1985)$. Justificar la respuesta.

Como $2021 = 43 \cdot 47$, tenemos que:

$$f(2021) = \underbrace{f(43)}_{0} + f(47) = f(47) = 0$$

Ahora calculamos:

$$3 \cdot 47 = 141$$

$$3 \cdot 3 \cdot 47 = 423 \Longrightarrow 0 = f(423) = \underbrace{f(3)}_{0} + \underbrace{f(3)}_{0} + f(47) \Longrightarrow f(47) = 0$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Nota: Trivialmente, si $f(n) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple la ecuación.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ $\quad \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$

$(\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\})$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{1, 2, \dots\}$

Vamos a sustituir $n = 1$ en la ecuación funcional:

$$\underbrace{f(1)}_{\geq 1} + \underbrace{f(f(1))}_{\geq 1} + \underbrace{f(f(f(1)))}_{\geq 1} = 3 \Longleftrightarrow \boxed{f(1) = 1},\ f(\underbrace{f(1)}_{1}) = 1,\ f(\underbrace{f(f(1))}_{1}) = 1$$

Podemos preguntarnos si $\exists\, \boxed{n_0 > 1}$ tales que $f(n_0) = 1$. Entonces tendríamos que:

$$\underbrace{f(n_0)}_{1} + \underbrace{f(f(n_0))}_{f(1) = 1} + \underbrace{f(f(f(n_0)))}_{f(1) = 1} = 3n_0 \Longrightarrow 3n_0 = 3;\ \boxed{n_0 = 1 \text{ !!!}}$$

Deducimos que no existe ningún otro natural $n_0 > 1$ tal que $f(n_0) = 1$.

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

$f(1) = 1$

$f(n) \geq 2 \quad \forall n \geq 2.$

$f(2) = 2$

$f(n) \geq 3 \quad \forall n \geq 3$

A continuación sustituimos $n=2$ en la ecuación funcional:

$$\underbrace{f(2)}_{\substack{\geq \\ 2}} + \underbrace{f(f(2))}_{\substack{\geq \\ 2}} + \underbrace{f(f(f(2)))}_{\substack{\geq \\ 2}} = 6 \Longrightarrow \boxed{f(2)=2},\ f(f(2))=2,\ f(f(f(2)))=2$$

Veamos que no existe ningún $\boxed{n_1 \geq 3}$ tal que $f(n_1)=2$. Si fuera así, entonces:

$$\underbrace{f(n_1)}_{2} + \underbrace{f(f(n_1))}_{2} + \underbrace{f(f(f(n_1)))}_{2} = 3n_1 \Longrightarrow 3n_1 = 6 ;\ \boxed{n_1 = 2 \text{ !!!}}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(3) = 3$
$\vdots$
$\boxed{f(n) = n}$

Repitiendo este proceso para cada $n \in \mathbb{N}$ llegamos a que la única solución es:

$\boxed{f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Vamos a probar que $F(n) = n$ usando inducción en $n \in \mathbb{N}$:

- Caso base: $n = 1$, ya vimos que $f(1) = 1$ ✓
- Paso inductivo: Supuesto $\underbrace{\text{cierta para}}_{f(n)=n}$ n, queremos ver que se $\underbrace{\text{cumple para}}_{¿f(n+1) = n+1?}$ $n+1$.

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Como $f(n)=n$, vamos a ver que no existe $\overbrace{m>n}^{m\geq n+1}$ tal que $f(m)=n$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\exists m>n$ tal que $f(m)=n$. Entonces:

$$\underbrace{f(m)+f(f(m))+f(f(f(m)))}_{3m} = n + f(n) + f(f(n)) \underset{\text{Hipótesis Inducción}}{=} n+n+n = 3n \Longrightarrow m=n \ !!!$$

Luego, $f(m) \geq n+1 \quad \forall m \geq n+1$. Luego:

$$\underbrace{f(n+1)}_{\substack{\vee\!/ \\ n+1}} + \underbrace{f(f(n+1))}_{\substack{\vee\!/ \\ n+1}} + \underbrace{f(f(f(n+1)))}_{\substack{\vee\!/ \\ n+1}} = 3(n+1) \Longrightarrow \boxed{f(n+1)=n+1},\ f(f(n+1))=n+1,\ f(f(f(n+1)))=n+1$$

$\boxtimes$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen que

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$$

para cualquier $x\in\mathbb{R}$ distinto de 0 y de 1.

Vamos a llamar:

$$g(x):=\frac{1}{1-x}$$

Entonces:

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{\cancel{1}-x\cancel{-1}}{1-x}}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}$$

$$(g\circ g\circ g)(x)=g(g(g(x)))=(g\circ g)(g(x))=(g\circ g)\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\frac{\cancel{1-1}+x}{\cancel{1-x}}}{\frac{1}{\cancel{1-x}}}=x$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0 y de 1.

Tenemos entonces que:

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$g(g(x)) = \frac{x-1}{x}$$

$$g(g(g(x))) = x$$

Veamos cómo queda nuestra ecuación funcional:

$$f(x) + f(g(x)) = x$$

$\downarrow$ cambiamos x por g(x)

$$f(g(x)) + f(g(g(x))) = \frac{1}{1-x}$$

$\downarrow$ cambiamos x por g(x)

$$f(g(g(x))) + f(\underbrace{g(g(g(x)))}_{x}) = \frac{x-1}{x}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{f(x)} + \boxed{f(g(x))} = x & (1) \\ \boxed{f(g(x))} + \boxed{f(g(g(x)))} = \dfrac{1}{1-x} & (2) \\ \boxed{f(x)} + \boxed{f(g(g(x)))} = \dfrac{x-1}{x} & (3) \end{cases}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0 y de 1.

Entonces:

$$\underbrace{(1) + (3) - (2)}_{x + \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1-x}} = \underbrace{2f(x) + f(\cancel{g(x)}) + f(\cancel{g(g(x))})}_{(1)+(3)} - \left(f(\cancel{g(x)}) + f(\cancel{g(g(x))})\right) = 2f(x)$$

Tenemos que:

$$\boxed{f(x)} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overbrace{x^2(1-x)}^{\cancel{x^2}-x^3} + \overbrace{(x-1)(1-x)}^{-\cancel{x^2}-1+2x} - 1\cdot x}{x(1-x)}\right) = \frac{-x^3+x-1}{2x(1-x)} = \boxed{\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0 y de 1.

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \end{aligned}$$

ECUACIONES DE CAUCHY.

para cualquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Comenzamos haciendo $x=y=0$ para obtener que:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Longleftrightarrow f(0) = 2f(0) \Longleftrightarrow \boxed{f(0)=0}$$

Si hacemos $y=x$ obtenemos:

$$f(2x) = f(x) + f(x) \Longleftrightarrow f(2x) = 2f(x)$$

De forma sucesiva, si $m \in \mathbb{N}$:

$$f(\underbrace{x+x+\dots+x}_{m \text{ veces}}) = \underbrace{f(x)+f(x)+\dots+f(x)}_{m \text{ veces}} \Longrightarrow f(mx) = mf(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$f(0)=0$
$f(mx)=mf(x) \quad m\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}$

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(x\cdot y) &= f(x)\cdot f(y) \end{aligned}$$

para cualquiera $x,y\in\mathbb{R}$.

Hacemos $y=-x$:

$$\underbrace{f(x-x)}_{\underbrace{f(0)}_{0}} = f(x)+f(-x) \Longrightarrow \overbrace{f(-x)=-f(x)}^{f \text{ es impar.}}$$

Luego, si $m\in\mathbb{N}$:

$$\left.\begin{aligned} f(-mx) &= -f(mx) = -mf(x) \\ f(mx) &= mf(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(mx)=mf(x) \quad \forall m\in\mathbb{Z}.$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$f(0)=0$

$f(mx)=mf(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}, \forall m\in\mathbb{Z}.$

$f(-x)=f(x)$

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(x\cdot y) &= f(x)\cdot f(y) \end{aligned}$$

para cualquiera $x,y\in\mathbb{R}$.

También podemos estudiar qué ocurre con:

$$\underbrace{f\Big(\underbrace{\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}_{n \text{ veces}}\Big)}_{f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=f(x)} = \underbrace{f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{x}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{x}{n}\right)}_{n \text{ veces}} = nf\left(\frac{x}{n}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Como f es impar, deducimos también que:

$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}.$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(x\cdot y) &= f(x)\cdot f(y) \end{aligned}$$

para cualquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

$f(0)=0 \quad f(-x)=-f(x)$

$f(mx)=mf(x) \quad m\in\mathbb{Z}$

$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x) \quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Juntando ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x) \underset{x=1}{\Longrightarrow} f\left(\underset{\mathbb{Q}}{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}\cdot\underbrace{f(1)}_{C_1}=\underset{\mathbb{Q}}{\frac{m}{n}}\,C_1$$

Las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ son de la forma:

$f(x)=C_1 x \quad , C_1\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{Q}.$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$f(0)=0 \quad f(-x)=-f(x)$

$f(x)=Cx\,,\ x\in\mathbb{Q}$

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(x\cdot y) &= f(x)\cdot f(y) \end{aligned}$$

para cualquiera $x,y\in\mathbb{R}$.

si hacemos $x=y=1$ en la segunda ecuación:

$$f(1)=f(1)f(1) \Longleftrightarrow f(1)^2=f(1) \Longleftrightarrow f(1)^2-f(1)=0 \Longleftrightarrow f(1)\left(f(1)-1\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

(i) si $f(1)=0$: si hacemos $y=1$:

$$f(x\cdot 1)=f(x)\underbrace{f(1)}_{0} \Longrightarrow \boxed{f(x)\equiv 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$f(0)=0$

$f(x)=Cx \quad , C\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{Q}$

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(x\cdot y) &= f(x)\cdot f(y) \end{aligned}$$

para cualquiera $x,y\in\mathbb{R}$.

¿$\mathbb{R}$?

(ii) Si $f(1)=1$: Entonces:

$\underbrace{f(1)}_{1}=C\cdot 1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow \boxed{f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{Q}}$

Vamos a ver que f es creciente, es decir, si $a>b$ entonces $f(a) > f(b)$. Para ello, sea $t:=a^2>0$, y hacemos $x=y=a$ en la segunda ecuación:

$\underbrace{f(a^2)}_{f(t)}=f(a)f(a) \Rightarrow f(t)=f(a)^2>0 \Rightarrow f(t)>0 \quad \forall t>0.$

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \end{aligned}$$

para cualquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Si tomamos $\boxed{a > b}$, podemos expresar $a = b + t$ con $t > 0$. Luego:

$\boxed{f(a)} = f(b+t) = f(b) + \underbrace{f(t)}_{\substack{\vee \\ 0}} \boxed{> f(b)} \Longrightarrow f$ creciente.

Sesión 19 Marzo 2021 - Ecuaciones Funcionales

$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$
f creciente. $\Longrightarrow f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \end{aligned}$$

para cualquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Por reducción al absurdo supongamos que $f(\hat{x}) \neq \hat{x}$ para cierto $\hat{x} \in \overbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}^{\mathbb{I}}$.
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(\hat{x}) > \hat{x}$. Si ahora tomamos $x_1 \in \mathbb{Q}$ con $x_1 < \hat{x}$, entonces:

$$\underbrace{f(x_1)}_{x_1} > f(\hat{x}) \Longrightarrow x_1 > f(\hat{x}) > \hat{x} \quad !!!$$

Luego, $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.